TSAKOS ENHANCED EDUCATION
NAUTICAL SCHOOL
ΤΣΑΚΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ
ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022 ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

04/06/2022

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΛΕΥΚΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση f(x)=x^2 για κάθε x∈ℝ. Να αποδείξετε ότι f′(x)=2x.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Άρα $(x^2)' = 2x$

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f′(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\sqrt{x}\right)'$ =...

β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$=...

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x > 0$ β. $f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν: 25, 10, 5, 20, 15.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{5} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$ απουσίες

$R = μεγαλύτερη\ παρατήρηση - μικρότερη\ παρατήρηση = 25 - 5 = 20$ απουσίες.

Β2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$s^2 = \frac{\sum (t_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(25-15)^2+(10-15)^2+(5-15)^2+(20-15)^2+(15-15)^2}{5} = \frac{10^2+(-5)^2+(-10)^2+5^2+0^2}{5} =$$
$$= \frac{100+25+100+25+0}{5} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (απουσίες)}^2.$$

Β3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} \cong 7{,}07$, οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{7{,}07}{15} \cong 0{,}471$ ή 47,1%.

Αφού CV > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + 1$, όπου x, α∈ℝ.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για x=1 είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι α=15.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f'(x) = (x^3 - 9x^2 + ax + 1)' = (x^3)' - (9x^2)' + (ax)' + 1' = 3x^2 - 18x^2 + a$$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1^2 + a = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + a = 0 \Leftrightarrow -15 + a = 0 \Leftrightarrow a = 15$.

Γ2. Για α=15 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(2,f(2)).

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$.

Βρίσκω την τιμή $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Βρίσκω την τιμή $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = 27 - 36 = -9$.

Στην γενική εξίσωση της ευθείας $y = \lambda x + \beta$ αντικαθιστώ :

$f(2) = f'(2) \cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 = (-9) \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 3 = -18 + \beta \Leftrightarrow 3 + 18 = \beta \Leftrightarrow \beta = 21$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $y = -9x + 21$.

Γ3. Για α=15 να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{-(-6)-\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6-4}{2} = 1$$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$

Για $x \in (-\infty, 1]$ f γνησίως αύξουσα

Για $x \in [1,5]$ f γνησίως φθίνουσα

Για $x \in [5, +\infty)$ f γνησίως αύξουσα

Για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή :

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 1 = 1 - 9 + 15 + 1 = 8$$

Για $x = 5$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή :

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = 125 - 225 + 75 + 1 = -24$$

Γ4. Για α=15 να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 18x + 15}{x^2 - 1}$$

Το όριο οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ καθώς $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 18x + 15) = 0$ και $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0$

Οπότε : $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3(1-5)}{1+1} = -\frac{12}{2} = -6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο f′(x) (μον. 4).

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Δ2. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση $\bar{x} = \frac{1}{f'(2)}$, $s = \frac{1}{2f'(1)}$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\bar{x}$=9 και s=2.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}. \text{ Άρα } \bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

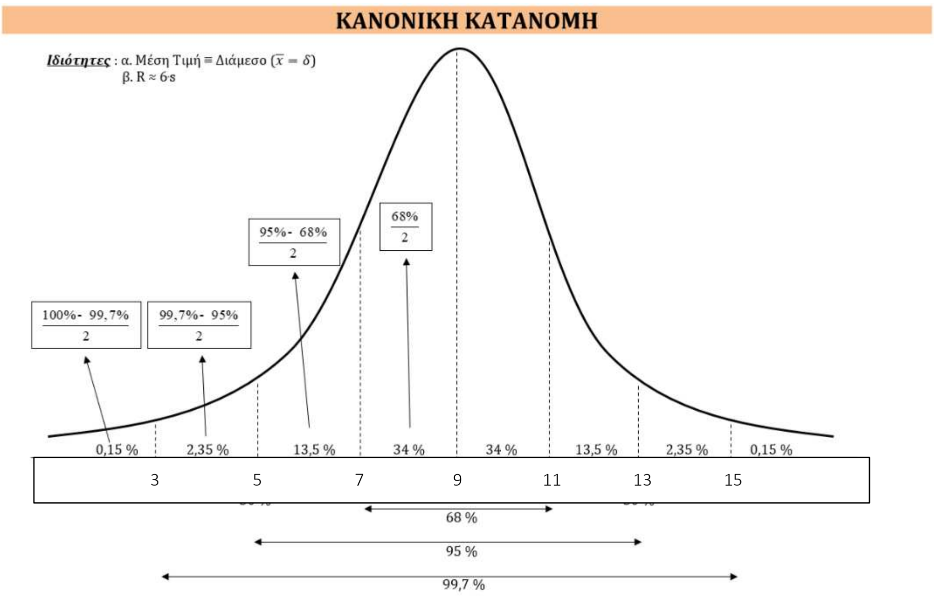
$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}. \text{ Άρα } s = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

Δ3. Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά σχεδιάζουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής με τα σχετικά ποσοστά.



Με βάση την καμπύλη, βλέπουμε ότι από 5 ⍰ 11 έχουμε ποσοστό : $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$.
Επομένως στο διάστημα αυτό βρίσκονται $\frac{81,5}{100} 2000 = 1630 \; άτομα$.

Τέλος πάνω από 15 αντιστοιχεί σε ποσοστό 0,15%.
Άρα τα άτομα είναι $\frac{0,15}{100}2000 = 3$.

Δ4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Με βάση την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$.
Η τυπική απόκλιση θα μείνει αμετάβλητη, οπότε $s_y = s = 2$.

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη επιλογή θεμάτων είναι τα εξής:

- Πρόκειται για θέματα χαμηλής δυσκολίας.
- Η διατύπωση είναι σαφής και ξεκάθαρη.
- Βασίζονται κατά το μεγαλύτερο βαθμό τους στο σχολικό βιβλίο.
- Οι καλά προετοιμασμένοι μαθητές θα επιτύχουν υψηλές βαθμολογίες.
- Οι μέτρια προετοιμασμένοι μαθητές μπορούν να πετύχουν μια ικανοποιητική βαθμολογία.
- Για πρώτη φορά δεν δόθηκε ως δεδομένη η προσέγγιση της προκύπτουσας τετραγωνικής ρίζας, πράγμα που προβλημάτισε κάπως τους υποψήφιους σχετικά με την ορθότητα της λύσης του Β2.
- Γενικά, χαρακτηρίζονται ως καλά θέματα που ανταμείβουν τους συγκεκριμένους μαθητές οι οποίοι είχαν να εξεταστούν σε επίσημο επίπεδο από την Γ γυμνασίου και δοκιμάστηκαν αρκετά κατά τη διαδρομή τους στο λύκειο λόγω της πανδημίας.