



**ΤΣΑΚΟΣ ENHANCED EDUCATION  
NAUTICAL SCHOOL  
ΤΣΑΚΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ  
ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023  
ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ**

**03/06/2022**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΛΕΥΚΑΚΗΣ**

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $c \cdot f(x)$  όπου  $c$  πραγματικός αριθμός, ισούται με  $c \cdot f'(x)$ .

Μονάδες 10

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω η συνάρτηση  $F(x) = cf(x)$ .

Έχουμε  $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$ ,

και για  $h \neq 0$   $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} = c \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .

Επομένως  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ c \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right] = cf'(x)$ .

Άρα  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ .

**A2.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$  με  $i = 1, 2, \dots, k$  μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

**β.** Αν  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε ισχύει:  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ .

**γ.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s$ , τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ .

**δ.**  $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$ .

**ε.** Η διάμεσος ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

**α.** Λάθος    **β.** Σωστό    **γ.** Σωστό    **δ.** Λάθος    **ε.** Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $a \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$ .

**Μονάδες 4**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 + ax^2 - 12x + 10)' = (2x^3)' + (ax^2)' - (12x)' + 10' = 2(x^3)' + a(x^2)' - 12x' \\ &= 2 \cdot 3x^2 + a \cdot 2x - 12 \cdot 1 = 6x^2 + 2ax - 12 \end{aligned}$$

**B2.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x = 1$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$ , να υπολογίσετε το  $a$ .

**Μονάδες 6**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$\begin{aligned} \text{Θα ισχύει } f'(1) &= 0 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 12 = 0 \Rightarrow 6 + 2a - 12 = 0 \Rightarrow 2a = 12 - 6 \Rightarrow 2a = 6 \\ \Rightarrow \frac{2a}{2} &= \frac{6}{2} \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

**B3.** Να Για  $a = 3$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

**Μονάδες 9**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \frac{6x^2}{6} + \frac{6x}{6} - \frac{12}{6} = \frac{0}{6} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}. \text{ Άρα } x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ή } x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		T.M.	T.E.		

Για  $x \in (-\infty, -2]$   $f$  γνησίως αύξουσα

Για  $x \in [-2, 1]$   $f$  γνησίως φθίνουσα

Για  $x \in [1, +\infty)$   $f$  γνησίως αύξουσα

Για  $x = -2$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή :

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 = -16 + 12 + 24 + 10 = 46 - 16 = 30$$

Για  $x = 1$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή :

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 2 + 3 - 12 + 10 = 15 - 12 = 3$$

B4. Να Για  $\alpha = 3$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$ .

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1}$$

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 1} (6x^2 + 6x - 12) = 6 + 6 - 12 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$ . Οπότε είναι απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$ .

Έχουμε βρει τις ρίζες από το Β3. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} [6(x+2)] = 6 \cdot (1+2) = 18$$

### ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		$v_3$	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι  $\bar{x} = 14$ .

Γ1. Να δείξετε ότι  $v_3 = 10$ .

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Συμπληρώνουμε τον πίνακα συναρτήσει του  $v_3$ .

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	$v_3$	$18v_3$
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	$40+v_3$	$520+18v_3$

Αφού γνωρίζουμε τη μέση τιμή  $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} \Rightarrow 14 = \frac{520+18v_3}{40+v_3} \Rightarrow 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \Rightarrow$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Rightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520 \Rightarrow 4v_3 = 40 \Rightarrow v_3 = 10$$

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Συμπληρώνουμε τον πίνακα βάζοντας όπου  $v_3 = 10$  και εκτελώντας τις πράξεις.

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση  $s^2$ .

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Προσθέτουμε τις στήλες  $x_i - \bar{x}$ ,  $(x_i - \bar{x})^2$  και  $(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$ .

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8,12)	10	20	200	-4	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0	0
[16,20)	18	10	180	4	16	160
[20,24)	22	5	110	8	64	320
	Σύνολο	50	700			800

$$\text{Άρα } s^2 = \frac{1}{v} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 800 = \frac{800}{50} = 16 \text{ (ώρες)}^2$$

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$\text{Έχουμε } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Άρα  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0,286$  άρα είναι περίπου 28,6% κι επειδή είναι μεγαλύτερος από 10% το δείγμα χαρακτηρίζεται μη ομοιογενές.

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ , με  $x \neq 0$ .

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

$$\text{Βρίσκουμε την παράγωγο } f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 = 0$  αδύνατη. Σχηματίζουμε τον πίνακα μονοτονίας και βρίσκουμε το πρόσημο της  $f'(x)$  στα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  επιλέγοντας τιμή σε καθένα.

$$f'(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \text{ και } f'(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Για  $x \in (-\infty, 0)$   $f$  γνησίως φθίνουσα

Για  $x \in (0, +\infty)$   $f$  γνησίως αύξουσα

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in [-4, -1]$  ισχύει  $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$ .

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Το διάστημα  $[-4, -1]$  περιέχεται στο  $(-\infty, 0)$  όπου η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα έχουμε:

$$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^2} \Rightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Υπολογίζουμε  $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$  και  $f'(1) = \frac{2}{1^2} = 2$  και αντικαθιστούμε στην  $y = \lambda x + \beta$ .

$$-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Rightarrow -1 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = -1 - 2 \Rightarrow \beta = -3.$$

Άρα  $y = 2x - 3$ .

Δ4. Αν  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$  είναι σημεία της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους  $x_1, x_2, x_3$  έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 4$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ , να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων  $y_1, y_2, y_3$ .

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Με βάση την εξίσωση του Δ3 έχουμε ότι το κάθε  $x_i$  μετασχηματίζεται σε  $y_i = 2x_i - 3$ . Οπότε θα έχουμε  $\bar{y} = 2 \cdot \bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$  και  $s_y = |2|s_x = 2 \cdot 2 = 4$ .

Άρα  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{5} = 0,8$  ή 80%.

# ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη επιλογή θεμάτων είναι τα εξής:

- Πρόκειται για θέματα αυξημένης δυσκολίας σε σχέση με τις προηγούμενες δύο χρονιές.
- Η διατύπωση είναι σαφής και ξεκάθαρη.
- Αρκετά ερωτήματα δεν βασίζονται στο σχολικό βιβλίο.
- Οι καλά προετοιμασμένοι μαθητές θα επιτύχουν καλές έως υψηλές βαθμολογίες.
- Οι μέτρια προετοιμασμένοι μαθητές δε θα μπορέσουν να πετύχουν ικανοποιητικές βαθμολογίες.
- Κάποια ερωτήματα είναι αρκετά δύσκολα για ένα μάθημα που διδάσκεται μόλις δύο ώρες την εβδομάδα.