TSAKOS ENHANCED EDUCATION
NAUTICAL SCHOOL
ΤΣΑΚΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ
ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024 ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

01/06/2024

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΛΕΥΚΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι: $\left(\boldsymbol{f(x)+g(x)}\right)' = \boldsymbol{f'(x)+g'(x)}$ Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]=[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]$

και για $h\neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Α2. α) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$. Τι ονομάζεται συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, i = 1,2,…, κ.

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων ονομάζεται (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) και συμβολίζεται ν_i.

Α2. β) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ οι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i} \quad ή \quad \bar{x}=\frac{\sum x_iw_i}{\sum w_i} \quad ή \quad \bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\cdots+w_\nu}$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση f(x)=|x| έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.
β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.
γ. Ισχύει $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α. ΛΑΘΟΣ β. ΛΑΘΟΣ γ. ΣΩΣΤΟ δ. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (3x^2)' + (5x)' + \left(\frac{1}{3}\right)' = x^2 - 6x + 5$$

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον.6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων. (μον.4) Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Άρα οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$ και $x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Σχηματίζουμε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Για $x \in (-\infty, 1]$ f γνησίως αύξουσα

Για $x \in [1,5]$ f γνησίως φθίνουσα

Για $x \in [5, +\infty)$ f γνησίως αύξουσα

Για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή :

$$f(1) = \frac{1}{3}1^2 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - 3 + 5 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Για $x = 5$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή :

$$f(5) = \frac{1}{3}5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{125}{3} - 75 + 25 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = 42 - 50 = -8$$

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x_0=0 **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f(0)=\frac{1}{3}0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\lambda=f'(0)=0^2-6\cdot 0+5=5$$

Αντικαθιστώ στην $y=\lambda x+\beta$

$$\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{3}$$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση έχει τύπο $y=5x+\frac{1}{3}$

Β4. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ **Μονάδες 4**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6(-1)+5=1+6+5=12$$

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε ℃) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: 22, 18, 20 + κ, 14, 16, όπου κ πραγματικός αριθμός. Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV=20\%$ και η τυπική απόκλιση $s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $s=4$ **Μονάδες 6**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το όριο οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Παίρνουμε τον αριθμητή ίσο με 0 , λύνουμε την εξίσωση και έχει ρίζες 1 και -7, οπότε με τον τύπο $a(x-x_1)(x-x_2)$ ο αριθμητής γίνεται $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$.

Οπότε $s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{1+7}{2}=4$

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x}=20$

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Παίρνουμε τον τύπο του $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}$ και αντικαθιστούμε :

$$\frac{20}{100}=\frac{4}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow 20|\bar{x}|=400\Leftrightarrow|\bar{x}|=20\Leftrightarrow\bar{x}=20 \text{ ή } \bar{x}=-20$$

Για να απορρίψουμε την τιμή -20 , υποθέτουμε ότι ισχύει και με βάση το δείγμα καταλήγουμε ότι:

$-20=\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow\kappa=-190$. Οπότε το δείγμα γίνεται 22,18,-170,14,16. Εκτός του ότι θερμοκρασία -170 είναι εξωπραγματική για την Ελλάδα, οπότε το απορρίπτουμε. Αν υπολογίσουμε τη διακύμανση βγαίνει:

$s^2 = \frac{(22+20)^2+(18+20)^2+(-170+20)^2+(14+20)^2+(16+20)^2}{5} = \frac{1764+1444+22500+1156+129}{5} = 5632$. Ενώ με βάση τα δεδομένα της άσκησης θα έπρεπε να βγει 16, αφού δίνεται ότι $s = 4$.

Άρα δεχόμαστε το $\bar{x} = 20$

Γ3. Να δείξετε ότι κ = 10 (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αφού $\bar{x} = 20$ έχουμε $20 = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$

Αντικαθιστούμε στο δείγμα, το διατάσσουμε σε αύξηση σειρά : 14,16,18,22,30. Επειδή το πλήθος είναι 5 , περιττός άρα $\delta = 18$.

Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

Μονάδες 6

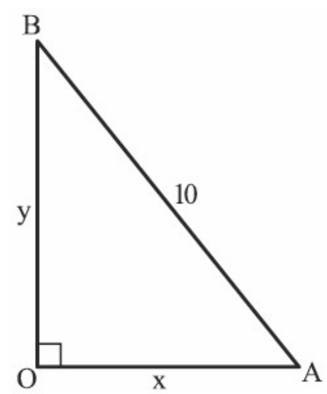
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η κάθε παρατήρηση x_i γίνεται $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = x_i + 0{,}1x_i = 1{,}1x_i$, δηλαδή πολλαπλασιάζεται με 1,1.

Οπότε $\bar{y} = 1{,}1\bar{x} = 1{,}1 \cdot 20 = 22$ και $s_y = |1{,}1|s = 1{,}1 \cdot 4 = 4{,}4$. Άρα $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4{,}4}{22} = 0{,}2$ ή 20%.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ γωνία Ο=90°, κάθετες πλευρές μήκους (ΟΑ)=x, (ΟΒ)=y και υποτείνουσα μήκους (ΑΒ)=10.



Δ1. Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο: $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ (μον.3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (μον.4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Εφόσον το x και το y αποτελούν πλευρές τριγώνου θεωρούμε σε όλη την έκταση της άσκησης ότι ισχύει $x > 0$ και $y > 0$.

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα : $x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$.
Άρα έχουμε τη συνάρτηση $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$.

Για το πεδίο ορισμού απαιτούμε $y > 0 \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0$. Για να έχει νόημα η ρίζα πρέπει:
$100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow -10 < x < 10$.
Όμως πρέπει και $x > 0$. Συναληθεύοντας τις δυο ανισώσεις προκύπτει ότι $x \in (0{,}10)$, οπότε το πεδίο ορισμού είναι $A = (0{,}10)$.

Δ1. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x όταν $x = 8$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2}' = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}(100 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Οπότε για $x = 8$, έχουμε $f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100-8^2}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{100 - x^2} - 8)(\sqrt{100 - x^2} + 8)}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{100 - x^2 - 8^2}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x\to 6}\frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x\to 6}\frac{36 - x^2}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$-\lim_{x\to 6}\frac{(x - 6)(x + 6)}{(x - 6)(\sqrt{100 - x^2} + 8)} = -\lim_{x\to 6}\frac{x + 6}{\sqrt{100 - x^2} + 8} = -\frac{6 + 6}{\sqrt{100 - 6^2} + 8} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

Δ4. Αν $x_1 = 2{,}3$, $x_2 = 3{,}5$ και $x_3 = 2{,}8$ είναι τιμές της πλευράς x, να αιτιολογήσετε ότι $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία. Για κάθε $x \in (0{,}10)$ η παράγωγος $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$ είναι αρνητική οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0{,}10)$.
Τώρα έχουμε ότι $x_1, x_2, x_3 \in (0{,}10)$ και $x_1 < x_3 < x_2$. Αφού f γνησίως φθίνουσα, η φορά θα αλλάξει και θα έχουμε τελικά $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη επιλογή θεμάτων είναι τα εξής:

- Πρόκειται για θέματα αναμενόμενης δυσκολίας .
- Η διατύπωση είναι σαφής και ξεκάθαρη εκτός από το ερώτημα Γ.2 που θα έπρεπε να δίνει ως δεδομένο ότι κ θετικός πραγματικός και όχι πραγματικός. Έτσι θα ήταν ορθό.
- Αρκετά ερωτήματα δεν βασίζονται στο σχολικό βιβλίο.
- Οι καλά προετοιμασμένοι μαθητές θα επιτύχουν καλές έως υψηλές βαθμολογίες.
- Οι μέτρια προετοιμασμένοι μαθητές δε θα μπορέσουν να πετύχουν ικανοποιητικές βαθμολογίες.