ΤΣΑΚΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ
ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
TSAKOS ENHANCED EDUCATION
NAUTICAL STUDIES

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2025 ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

03/06/2025

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΛΕΥΚΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή x . Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}$, $t_2 - \bar{x}$,. . .,$t_\nu - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έχουμε : $\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu} = \frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\dots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu} = \frac{t_1-\bar{x}+t_2-\bar{x}+\dots+t_\nu-\bar{x}}{\nu} = \frac{t_1+t_2+\dots+t_\nu-\nu\cdot\bar{x}}{\nu} =$

$= \frac{t_1+t_2+\dots+t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\cdot\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος. ΛΑΘΟΣ

β. Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς. ΣΩΣΤΟ

γ. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του y = f(x) ως προς το x, όταν $x = x_0$. ΣΩΣΤΟ

δ. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$, $c\in\mathbb{R}$. ΣΩΣΤΟ

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. ΛΑΘΟΣ

Μονάδες 10

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(c)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	…	…	…
1	15	…	…
2	11	…	…
3	8	…	…
4	6	…	50
Σύνολο	50	100	

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Από τη σχέση $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5$, αντικαθιστώντας τα δεδομένα της στήλης ν_i του πίνακα, έχουμε : $50 = \nu_1 + 15 + 11 + 8 + 6 \Rightarrow 50 = \nu_1 + 40 \Rightarrow \nu_1 = 50 - 40 \Rightarrow \nu_1 = 10$.

Για τη στήλη $f_i\%$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100\%$.
Άρα $f_1\% = \frac{10}{50}100 = \frac{1000}{50} = 20\%$, $f_2\% = \frac{15}{50}100 = \frac{1500}{50} = 30\%$, $f_3\% = \frac{11}{50}100 = \frac{1100}{50} = 22\%$, $f_4\% = \frac{8}{50}100 = \frac{800}{50} = 16\%$ και $f_5\% = \frac{6}{50}100 = \frac{600}{50} = 12\%$.

Τέλος, έχουμε $N_1 = \nu_1 = 10$, $N_2 = N_1 + \nu_2 = 10 + 15 = 25$, $N_3 = N_2 + \nu_3 = 25 + 11 = 36$, $N_4 = N_3 + \nu_4 = 36 + 8 = 44$ και $N_5 = N_4 + \nu_5 = 44 + 6 = 50$.

Άρα ο πίνακας γίνεται :

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\bar{x} = \frac{0\cdot10+1\cdot15+2\cdot11+3\cdot8+4\cdot6}{50} = \frac{0+15+22+24+24}{50} = \frac{85}{50} = 1{,}7$$

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ του δείγματος.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αφού $\nu = 50$, δηλαδή άρτιος : $\delta = \frac{x_{25}+x_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Β4. α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες. (μον. 3)

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή. (μον. 3)

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Το ποσοστό όσων εργάστηκαν το πολύ 3 ώρες είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$.

β) Αφού σε όλες τις παρατηρήσεις προσθέτω 4 ώρες άρα η νέα μέση τιμή θα είναι αυξημένη κατά 4, δηλαδή: $1{,}7 + 4 = 5{,}7$ ώρες.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $-2x^3 + 6x^2 + \alpha$, x∈ℝ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + a)' = (-2x^3)' + (6x^2)' + a' = -6x^2 + 12x + 0 = -6x^2 + 12x.$

Βρίσκουμε τις ρίζες της $f'(x) = 0$.
$-6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -6x(x-2) = 0 \Rightarrow -6x = 0$ ή $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Σχηματίζουμε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων:

x	$-\infty$	**0**		**2**	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	*Γν. φθίνουσα*		*Γν. αύξουσα*		*Γν. φθίνουσα*
		Τ.Ελ.		Τ.Μεγ.	

Άρα τα διαστήματα μονοτονίας είναι : $x \in (-\infty, 0]$ f γνησίως φθίνουσα, $x \in [0,2]$ f γνησίως αύξουσα, και $x \in [2, +\infty)$ f γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της f ως συνάρτηση του α (μον. 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, αν το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων της f είναι -8 . (μον. 4)

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Με βάση τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ με τιμή $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + a = 0 + 0 + a = a$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 2$ με τιμή $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + a = -16 + 24 + a = 8 + a$.

Επειδή το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων ισούται με -8, θα έχουμε $\frac{f(0)+f(2)}{2} = -8$.
Άρα, $\frac{\alpha+8+\alpha}{2} = -8 \Rightarrow \frac{2a+8}{2} = -8 \Rightarrow \frac{2(a+4)}{2} = -8 \Rightarrow a + 4 = -8 \Rightarrow a = -12$.

Γ3. Για α=-12, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ(1,f(1)).

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για $\alpha = -12$ η συνάρτηση είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$ και $f'(x) = -6x^2 + 12x$.

Άρα, για $x = 1$: $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 + 6 - 12 = -14 + 6 = -8$
και $f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$.

Αντικαθιστώ στην $y = \lambda x + \beta$. $-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow -8 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -14$. Άρα $y = 6x - 14$.

Γ4. Για α=−12, να δείξετε ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε x∈ [2, +∞).

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα για κάθε $x \geq 2$ έχουμε ότι :

$$f(x) \leq f(2) \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^3}{-2} + \frac{6x^2}{-2} - \frac{8}{-2} \geq \frac{0}{-2} \Rightarrow$$

$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$, οπότε η ζητούμενη ανισότητα αποκαταστάθηκε.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με x ∈ ℝ και λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

Δ1. Αν ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το δοσμένο όριο ισούται με την $f'(1)$. Άρα $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}\right)' = x^2 + 2\lambda x + 7$. Στη συνέχεια $f'(1) = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -4$.

Δ2. Για λ=−4, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η παράγωγος για $\lambda = -4$ είναι : $f'(x) = x^2 - 8x + 7$.

Βρίσκουμε τις ρίζες της $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$. $\Delta = 64 - 28 = 36$.
Οι ρίζες είναι $x = 1$, $x = 7$.

Σχηματίζουμε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων:

x	$-\infty$	1		7	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	Γν. αύξουσα		Γν. φθίνουσα		Γν. αύξουσα

Τ.Μεγ. Τ.Ελ.

Άρα τα διαστήματα μονοτονίας είναι : $x \in (-\infty, 1]$ f γνησίως αύξουσα, $x \in [1,7]$ f γνησίως φθίνουσα, και $x \in [7, +\infty)$ f γνησίως αύξουσα.

Δ3. Για λ=−4, να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{f(2025)-f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)}$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$2020, 2025 \in [7, +\infty)$ όπου f γνησίως αύξουσα.
$2020 < 2025 \Rightarrow f(2020) < f(2025) \Rightarrow f(2025) > f(2020) \Rightarrow f(2025) - f(2020) > 0$.

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1,7]$ όπου f γνησίως φθίνουσα.
$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$.

Οπότε το πηλίκο δύο θετικών είναι θετικός και $A > 0$.

Δ4. Για λ=−4, να υπολογιστεί το όριο : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αρχικά υπολογίζουμε την $f''(x)$: $f''(x) = (x^2 - 8x + 7)' = 2x - 8$. Αντικαθιστούμε στο όριο:
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-8x+7-(2x-8)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 10x + 16) = 2^2 - 10 \cdot 2 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{2+1} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$.

Άρα οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-10x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-8x-2x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x(x-8)-2(x-8)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{x+1-3} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left[(x-8)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)\right] =$

$= (2-8) \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = -6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = -12 \cdot \sqrt{3}$