



**ΤΣΑΚΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ
ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΣΑΚΟΣ ENHANCED EDUCATION
NAUTICAL STUDIES**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2026
ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ**

02/06/2026

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΚΥΡΙΑΚΟΣ ΛΕΥΚΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\text{Έχουμε : } f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

- A2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάρθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

- A3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f ;

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f' .

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. ΛΑΘΟΣ

β. ΣΩΣΤΟ

γ. ΣΩΣΤΟ

δ. ΛΑΘΟΣ

ε. ΣΩΣΤΟ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1}$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

B1. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (x^2)' - (3x)' + 1' = \frac{1}{3}3x^2 - 2x - 3 + 0 = x^2 - 2x - 3$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

B2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$
 $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$

Άρα $x_1 = 3$ και $x_2 = -1$

Σχηματίζουμε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων:

| | | | | | |
|---------|-------------|-----------|--------------|-------------|-----|
| x | $-\infty$ | -1 | 3 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | $+$ | \ominus | $-$ | \ominus | $+$ |
| $f(x)$ | Γν. αύξουσα | | Γν. φθίνουσα | Γν. αύξουσα | |

Τ.μεγ. Τ.ελαχ.

Άρα τα διαστήματα μονοτονίας είναι : $x \in (-\infty, -1]$ f γνησίως αύξουσα, $x \in [-1, 3]$ f γνησίως φθίνουσα, και $x \in [3, +\infty)$ f γνησίως αύξουσα.

Για $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή:

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = \frac{8}{3}$$

Για $x = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

B3. $f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Επίσης $f(0) = 1$.
 $y = \lambda x + \beta \Rightarrow 1 = -3 \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = 1$. Άρα $y = -3x + 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

B4. Το όριο οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε με παραγοντοποίηση προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -1 - 3 = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι αντίστοιχα:

4, 5, 4, κ, 0, 3, 7 όπου κ φυσικός αριθμός.

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι $\bar{x} = 4$, να βρείτε τον κ.

Μονάδες 5

Για $\kappa = 5$:

Γ2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

Μονάδες 10

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Γ1. $4 = \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} \Rightarrow 28 = 23 + \kappa \Rightarrow \kappa = 5$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Γ2. Διατάσσω σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις : 0,3,4,4,5,5,7 οπότε διαγράφοντας εναλλάξ από αρχή και τέλος περισσεύει το 4 το οποίο είναι η τιμή της διαμέσου $\delta=4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Γ3. $s^2 = \frac{1}{7}[(4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (0-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2] =$

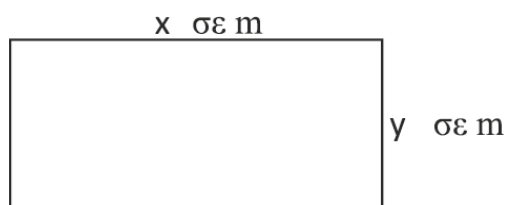
$$s^2 = \frac{1}{7} \cdot (0 + 1 + 0 + 1 + 16 + 1 + 9) = \frac{28}{7} = 4$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Γ4. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$
 $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ή 50% > 10% άρα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού 100 m^2 .



Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 5

Δ2. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Pi(x)$ (μον. 5) και να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο (μον. 3).

Μονάδες 8

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι τιμές της πλευράς του παραπάνω ορθογωνίου με $x_1, x_2 \in (0,10)$ και $x_1 < x_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δ1. Αφού εμβαδό ισούται με 100, άρα $x \cdot y = 100$.
 Αφού x και y είναι διαστάσεις, θα πρέπει $x > 0$ και $y > 0$
 Οπότε προκύπτει $y = \frac{100}{x}$ με $x > 0$.
 Περίμετρος ορθογωνίου $\Pi = 2x + 2y \Rightarrow \Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$ με $x > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\Delta 2. \quad \Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = (2x)' + \left(\frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

Λύνω $\Pi'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 200}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow x = \pm 10$ Δεχόμαστε μόνο τη θετική τιμή $x = 10$ λόγω του πεδίου ορισμού.

Σχηματίζουμε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων.

| | | | |
|-----------|--------------|----|-------------|
| x | 0 | 10 | $+\infty$ |
| $\Pi'(x)$ | — | ○ | + |
| $\Pi(x)$ | Γν. φθίνουσα | | Γν. αύξουσα |

Ο.ελαχ

Άρα για $x \in (0, 10]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και για $x \in [10, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x = 10m$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και $y = \frac{100}{10} = 10m$ άρα είναι τετράγωνο εφόσον οι δύο διαστάσεις του είναι ίσες και γνωρίζαμε ότι είναι ορθογώνιο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- $\Delta 3.$ Αφού $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$, άρα παρονομαστής αρνητικός.
 Αφού $x_1, x_2 \in (0, 10]$ όπου Π γνησίως φθίνουσα, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$. Άρα ο αριθμητής θετικός.
 Συνεπώς το πηλίκο θετικού με αρνητικό, δίνει $A < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{aligned} \Delta 4. \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2x^2 - 200}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2x^2 - 200}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)(\sqrt{10x} + 10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(10x - 100)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x - 10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2} = \\ &= \frac{2(10 + 10)(\sqrt{100} + 10)}{10 \cdot 100} = \frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη επιλογή θεμάτων είναι τα εξής:

- Πρόκειται για θέματα χαμηλότερης δυσκολίας σε σχέση με άλλες χρονιές, με εξαίρεση το Δ που είναι λίγο πιο απαιτητικό.
- Η διατύπωση είναι σαφής και ξεκάθαρη.
- Τα περισσότερα ερωτήματα βασίζονται στο σχολικό βιβλίο.
- Οι καλά προετοιμασμένοι μαθητές θα επιτύχουν υψηλές βαθμολογίες.
- Οι μέτρια προετοιμασμένοι μαθητές θα μπορέσουν να πετύχουν ικανοποιητικές βαθμολογίες.